

CORRECTIONExercice n°1

Le quadruplet (D,A,C,H) détermine un repère orthonormal de l'espace car les vecteurs \overline{DA} , \overline{DC} et \overline{DH} ne sont pas coplanaires et sont même orthogonaux deux à deux

Le quadruplet (D,A,B,H) détermine un repère de l'espace car les vecteurs \overline{DA} , \overline{DB} et \overline{DH} ne sont pas coplanaires. En revanche ce repère n'est pas orthonormal car les vecteurs \overline{DA} et \overline{DB} ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (D,B,F,H) ne détermine pas un repère de l'espace car le vecteur \overline{DF} s'exprime à l'aide de \overline{DB} et \overline{DH} (en effet $\overline{DF} = \frac{1}{2}(\overline{DB} + \overline{DH}) = \frac{1}{2}\overline{DB} + \frac{1}{2}\overline{DH}$)

Le quadruplet (D,C,H,E) détermine un repère de l'espace car les vecteurs \overline{DC} , \overline{DH} et \overline{DE} ne sont pas coplanaires. En revanche ce repère n'est pas orthonormal car les vecteurs \overline{DH} et \overline{DE} ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (A,B,C,G) détermine un repère de l'espace car les vecteurs \overline{AB} , \overline{AC} et \overline{AG} ne sont pas coplanaires. En revanche ce repère n'est pas orthonormal car les vecteurs \overline{AB} et \overline{AC} ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (A,B,C,F) détermine un repère de l'espace car les vecteurs \overline{AB} , \overline{AC} et \overline{AF} ne sont pas coplanaires. En revanche ce repère n'est pas orthonormal car les vecteurs \overline{AB} et \overline{AC} ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (A,B,C,H) détermine un repère de l'espace car les vecteurs \overline{AB} , \overline{AC} et \overline{AH} ne sont pas coplanaires. En revanche ce repère n'est pas orthonormal car les vecteurs \overline{AB} et \overline{AC} ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (A,B,C,E) détermine un repère de l'espace car les vecteurs \overline{AB} , \overline{AC} et \overline{AE} ne sont pas coplanaires. En revanche ce repère n'est pas orthonormal car les vecteurs \overline{AB} et \overline{AC} ne sont pas orthogonaux

Exercice n°2

1) Le point O étant l'origine du repère, on aura O(0 ; 0 ; 0)

Puisque $\overline{OA} = 1 \times \overline{OA} + 0 \times \overline{OC} + 0 \times \overline{OD}$, on aura A(1 ; 0 ; 0). Puisque $\overline{OB} = 1 \times \overline{OA} + 1 \times \overline{OC} + 0 \times \overline{OD}$, on aura B(1 ; 1 ; 0)

Puisque $\overline{OC} = 0 \times \overline{OA} + 1 \times \overline{OC} + 0 \times \overline{OD}$, on aura C(0 ; 1 ; 0). Puisque $\overline{OD} = 0 \times \overline{OA} + 0 \times \overline{OC} + 1 \times \overline{OD}$, on aura D(0 ; 0 ; 1)

Puisque $\overline{OE} = 1 \times \overline{OA} + 0 \times \overline{OC} + 1 \times \overline{OD}$, on aura E(1 ; 0 ; 1). Puisque $\overline{OF} = 1 \times \overline{OA} + 1 \times \overline{OC} + 1 \times \overline{OD}$, on aura F(1 ; 1 ; 1)

Puisque $\overline{OG} = 0 \times \overline{OA} + 1 \times \overline{OC} + 1 \times \overline{OD}$, on aura G(0 ; 1 ; 1)

2) Le milieu de [AE] aura pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_E}{2} = 1; \frac{y_A + y_E}{2} = 0; \frac{z_A + z_E}{2} = 1 \right)$

3) Le centre I du carré DEFG est le milieu de chacune de ses diagonales, donc a pour coordonnées $\left(\frac{x_D + x_F}{2} = 1; \frac{y_D + y_F}{2} = 1; \frac{z_D + z_F}{2} = 1 \right)$

4) Le point de coordonnées $\left(0; 0; \frac{1}{2} \right)$ est le milieu de [OD]. Le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0 \right)$ est le milieu de [OB]. Le

point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$ est le milieu de [OF].

Exercice n°3

1) Dans le repère (D; \overline{DA} ; \overline{DC} ; \overline{DH}) : Le point D étant l'origine du repère, on aura D(0 ; 0 ; 0)

Puisque $\overline{DA} = 1 \times \overline{DA} + 0 \times \overline{DC} + 0 \times \overline{DH}$, on aura A(1 ; 0 ; 0). Puisque $\overline{DB} = 1 \times \overline{DA} + 1 \times \overline{DC} + 0 \times \overline{DH}$, on aura B(1 ; 1 ; 0)

Puisque $\overline{DC} = 0 \times \overline{DA} + 1 \times \overline{DC} + 0 \times \overline{DH}$, on aura C(0 ; 1 ; 0). Puisque $\overline{DE} = 1 \times \overline{DA} + 0 \times \overline{DC} + 1 \times \overline{DH}$, on aura E(1 ; 0 ; 1)

Puisque $\overline{DF} = 1 \times \overline{DA} + 1 \times \overline{DC} + 1 \times \overline{DH}$, on aura F(1 ; 1 ; 1). Puisque $\overline{DG} = 0 \times \overline{DA} + 1 \times \overline{DC} + 1 \times \overline{DH}$, on aura G(0 ; 1 ; 1)

Puisque $\overline{DH} = 0 \times \overline{DA} + 0 \times \overline{DC} + 1 \times \overline{DH}$, on aura H(0 ; 0 ; 1)

Dans le repère (D; \overline{DA} ; \overline{DC} ; \overline{DI}) : Le point D étant l'origine du repère, on aura D(0 ; 0 ; 0)

Puisque $\overline{DA} = 1 \times \overline{DA} + 0 \times \overline{DC} + 0 \times \overline{DI}$, on aura A(1 ; 0 ; 0). Puisque $\overline{DB} = 1 \times \overline{DA} + 1 \times \overline{DC} + 0 \times \overline{DI}$, on aura B(1 ; 1 ; 0)

Puisque $\overline{DC} = 0 \times \overline{DA} + 1 \times \overline{DC} + 0 \times \overline{DI}$, on aura C(0 ; 1 ; 0). Puisque $\overline{DE} = 1 \times \overline{DA} + 0 \times \overline{DC} + 2 \times \overline{DI}$, on aura E(1 ; 0 ; 2)

Puisque $\overline{DF} = 1 \times \overline{DA} + 1 \times \overline{DC} + 2 \times \overline{DI}$, on aura F(1 ; 1 ; 2). Puisque $\overline{DG} = 0 \times \overline{DA} + 1 \times \overline{DC} + 2 \times \overline{DI}$, on aura G(0 ; 1 ; 2)

Puisque $\overline{DH} = 0 \times \overline{DA} + 0 \times \overline{DC} + 2 \times \overline{DI}$, on aura H(0 ; 0 ; 2)

Exercice n°4

1) a) Puisque A est le point de coordonnées (1 ; 1 ; 0), cela signifie que $\overrightarrow{OA} = 1 \times \overrightarrow{OI} + 1 \times \overrightarrow{OJ} + 0 \times \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$. Le quadrilatère OIAJ est donc un parallélogramme.

b) Dans le repère orthonormal $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OK})$, on a $OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2 + (z_A - z_O)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

2) a) Puisque B est le point de coordonnées (0 ; 1 ; 1), cela signifie que $\overrightarrow{OB} = 0 \times \overrightarrow{OI} + 1 \times \overrightarrow{OJ} + 1 \times \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OK}$. Le quadrilatère OJBK est donc un parallélogramme.

b) Dans le repère orthonormal $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OK})$, on a $OB = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2 + (z_B - z_O)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Exercice n°5

$$1) \overrightarrow{AB} \begin{cases} x_B - x_A = 1 \\ y_B - y_A = -8 \\ z_B - z_A = 3 \end{cases} \quad 2) \text{ Si I est le milieu de [AB], alors } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 1 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice n°6

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{61}$$

Exercice n°7

1) Les vecteurs $\vec{u}(3; 6; 12)$ et $\vec{v}(2; 4; 8)$ sont colinéaires car $\vec{v} = \frac{2}{3}\vec{u}$

2) Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\vec{u} + \vec{v}(5; 10; 20)$

3) Le vecteur $2\vec{u}$ a pour coordonnées $2\vec{u}(6; 12; 24)$. Le vecteur $5\vec{v}$ a pour coordonnées $5\vec{v}(10; 20; 40)$.

En soustrayant les coordonnées des deux vecteurs $2\vec{u}$ et $5\vec{v}$, le vecteur $2\vec{u} - 5\vec{v}$ aura donc pour coordonnées $2\vec{u} - 5\vec{v}(-4; -8; -16)$

Exercice n°8

Si $\overrightarrow{OC} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ alors les coordonnées de C sont C(5 ; 4 ; -1)

$$\text{Le vecteur } \overrightarrow{AB} \text{ a donc pour coordonnées } \overrightarrow{AB} \begin{cases} x_B - x_A = -1 \\ y_B - y_A = 0 \\ z_B - z_A = -12 \end{cases} \text{ donc } 2\overrightarrow{AB} \text{ a pour coordonnées } 2\overrightarrow{AB} \begin{cases} -2 \\ 0 \\ -24 \end{cases}$$

$$\text{Le vecteur } \overrightarrow{AC} \text{ a donc pour coordonnées } \overrightarrow{AC} \begin{cases} x_C - x_A = 7 \\ y_C - y_A = 3 \\ z_C - z_A = -11 \end{cases} \text{ donc } 4\overrightarrow{AC} \text{ a pour coordonnées } 4\overrightarrow{AC} \begin{cases} 28 \\ 12 \\ -44 \end{cases}$$

En additionnant les coordonnées des deux précédents vecteurs, le vecteur $\vec{u} = 4\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$ aura donc pour coordonnées

$$\vec{u} = 4\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} \begin{cases} -2 + 28 = 26 \\ 0 + 12 = 12 \\ -24 + (-44) = -68 \end{cases}$$

Exercice n°9

Dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, les coordonnées de A sont A(10 ; 0 ; 0), celles de B(0 ; 10 ; 0) et celles de

$$C(0 ; 0 ; 10). \text{ Ainsi } \overrightarrow{OA} \begin{vmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \overrightarrow{OB} \begin{vmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OC} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{vmatrix}$$

Puisque $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, les coordonnées de \overrightarrow{OD} donc celles de D, sont $\overrightarrow{OD}(10;10;0)$. Ainsi D(10 ; 10 ; 0)

Le vecteur $\overrightarrow{OE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} - \frac{3}{10}\overrightarrow{OC}$ a donc pour coordonnées $\overrightarrow{OE}\left(\frac{3}{2}\times 10 = 15; \frac{2}{5}\times 10 = 4; -\frac{3}{10}\times 10 = -3\right)$, donc le point E a pour coordonnées $E(15; 4; -3)$

Puisque $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$, les coordonnées de \overrightarrow{OF} donc celles de F, sont $\overrightarrow{OF}(10; 0; 10)$. Ainsi F(10 ; 0 ; 10)

Puisque $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, les coordonnées de \overrightarrow{OG} donc celles de G, sont $\overrightarrow{OG}(10; 10; 10)$. Ainsi G(10 ; 10 ; 10)

Puisque $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, les coordonnées de \overrightarrow{OH} donc celles de H, sont $\overrightarrow{OH}(0; 10; 10)$. Ainsi H(0 ; 10 ; 10)

Puisque $\overrightarrow{OK} = \frac{6}{5}\overrightarrow{OG} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OE}$, les coordonnées de \overrightarrow{OK} donc celles de K, sont $\overrightarrow{OK}\left(\frac{6}{5}\times 10 + \frac{1}{5}\times 15 = 15; \frac{6}{5}\times 10 + \frac{1}{5}\times 4 = \frac{64}{5}; \frac{6}{5}\times 10 + \frac{1}{5}\times (-3) = \frac{57}{5}\right)$. Ainsi $K\left(15; \frac{64}{5}; \frac{57}{5}\right)$

Notons $L(x; y; z)$. D'une part les coordonnées de \overrightarrow{AL} sont $\overrightarrow{AL} \begin{cases} x - x_A = x - 10 \\ y - y_A = y \\ z - z_A = z \end{cases}$. D'autre part, les coordonnées de

$$\frac{2}{5}\overrightarrow{DB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OF} \text{ sont } \frac{2}{5}\overrightarrow{DB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OF} \begin{cases} \frac{2}{5}\times(x_B - x_D) - \frac{1}{2}\times(x_F - x_O) = \frac{2}{5}\times(-10) - \frac{1}{2}\times 10 = -9 \\ \frac{2}{5}\times(y_B - y_D) - \frac{1}{2}\times(y_F - y_O) = \frac{2}{5}\times 0 - \frac{1}{2}\times 0 = 0 \\ \frac{2}{5}\times(z_B - z_D) - \frac{1}{2}\times(z_F - z_O) = \frac{2}{5}\times 0 - \frac{1}{2}\times 10 = -5 \end{cases}$$

De l'égalité $\overrightarrow{AL} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OF}$, on déduit $\begin{cases} x - 10 = -9 \\ y = 0 \\ z = -5 \end{cases}$. Le point L a donc pour coordonnées L(1 ; 0 ; -5)

Exercice n°10

1^{ère} méthode Le point G centre de gravité du triangle ABC est le barycentre du système $\{(A;1);(B;1);(C;1)\}$. Ainsi

$$\begin{cases} x_G = \frac{1 \times x_A + 1 \times x_B + 1 \times x_C}{1 + 1 + 1} = \frac{3}{3} = 1 \\ y_G = \frac{1 \times y_A + 1 \times y_B + 1 \times y_C}{1 + 1 + 1} = \frac{5}{3} \\ z_G = \frac{1 \times z_A + 1 \times z_B + 1 \times z_C}{1 + 1 + 1} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

2^{ème} méthode : Le point G vérifie l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ où I est le milieu de [BC]

Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{x_B + x_C}{2} = 0; \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{5}{2}; \frac{z_B + z_C}{2} = 2\right)$

Le vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ a donc pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}(x_I - x_A) = -2; \frac{2}{3}(y_I - y_A) = \frac{5}{3}; \frac{2}{3}(z_I - z_A) = \frac{4}{3}\right)$

Notons $G(x; y; z)$. D'une part les coordonnées de \overrightarrow{AG} sont $\overrightarrow{AG} \begin{cases} x - x_A = x - 3 \\ y - y_A = y \\ z - z_A = z \end{cases}$.

$$\text{L'égalité } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} \text{ implique } \begin{cases} x-3 = -2 \\ y = -\frac{5}{3} \\ z = \frac{4}{3} \end{cases} . \text{ On retrouve bien les coordonnées de } G\left(1; -\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$$

Exercice n°11

1) On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{cases} x_B - x_A = 2 \\ y_B - y_A = -2 \\ z_B - z_A = 2 \end{cases}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{cases} x_C - x_A = 2 \\ y_C - y_A = 1 \\ z_C - z_A = -10 \end{cases}$. Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont

pas colinéaires car il n'existe pas de réel k unique satisfaisant aux trois conditions $\begin{cases} 2k = 2 \\ -2k = 1 \\ 2k = -10 \end{cases}$. Les points A, B et C ne

sont donc pas alignés.

2) a) Notons $D(x; y; z)$. Alors $\overrightarrow{AD} \begin{cases} x_D - x_A = x - 2 \\ y_D - y_A = y - 1 \\ z_D - z_A = z - 3 \end{cases}$ donc $3\overrightarrow{AD} \begin{cases} 3(x_D - x_A) = 3x - 6 \\ 3(y_D - y_A) = 3y - 3 \\ 3(z_D - z_A) = 3z - 9 \end{cases}$. Comme $2\overrightarrow{AB} \begin{cases} 2(x_B - x_A) = 4 \\ 2(y_B - y_A) = -4 \\ 2(z_B - z_A) = 4 \end{cases}$

et $\overrightarrow{BC} \begin{cases} x_C - x_B = 0 \\ y_C - y_B = 3 \\ z_C - z_B = -12 \end{cases}$, l'égalité $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ entraîne $\begin{cases} 4 + 3x - 6 = 0 \\ -4 + 3y - 3 = 3 \\ 4 + 3z - 9 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{10}{3} \\ z = -\frac{7}{3} \end{cases}$. Ainsi $D\left(\frac{2}{3}; \frac{10}{3}; -\frac{7}{3}\right)$.

b) Les coordonnées du milieu E de [BC] sont $\left(x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = 4; y_E = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1}{2}; z_E = \frac{z_B + z_C}{2} = -1\right)$

c) 1^{ère} méthode : Le point F centre de gravité du triangle ABC est le barycentre du système $\{(A;1);(B;1);(C;1)\}$.

$$\text{Ainsi } \begin{cases} x_F = \frac{1 \times x_A + 1 \times x_B + 1 \times x_C}{1 + 1 + 1} = \frac{10}{3} \\ y_F = \frac{1 \times y_A + 1 \times y_B + 1 \times y_C}{1 + 1 + 1} = \frac{2}{3} \\ z_F = \frac{1 \times z_A + 1 \times z_B + 1 \times z_C}{1 + 1 + 1} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

2^{ème} méthode : On aurait pu utiliser l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ vérifiée par le point F.

d) Notons $G(x; y; z)$. Alors $\overrightarrow{GA} \begin{cases} x_A - x_G = 2 - x \\ y_A - y_G = 1 - y \\ z_A - z_G = 3 - z \end{cases}$ donc $3\overrightarrow{GA} \begin{cases} 3(x_A - x_G) = 6 - 3x \\ 3(y_A - y_G) = 3 - 3y \\ 3(z_A - z_G) = 9 - 3z \end{cases}$. De plus $\overrightarrow{GB} \begin{cases} x_B - x_G = 4 - x \\ y_B - y_G = -1 - y \\ z_B - z_G = 5 - z \end{cases}$

$$2\overrightarrow{GB} \begin{cases} 2(x_B - x_G) = 8 - 2x \\ 2(y_B - y_G) = -2 - 2y \\ 2(z_B - z_G) = 10 - 2z \end{cases} . \text{ Enfin } \overrightarrow{CG} \begin{cases} x_G - x_C = x - 4 \\ y_G - y_C = y - 2 \\ z_G - z_C = z + 7 \end{cases}$$

De l'égalité $3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{CG}$, on déduit $\begin{cases} 6 - 3x - (8 - 2x) = x - 4 \\ 3 - 3y - (-2 - 2y) = y - 2 \\ 9 - 3z - (10 - 2z) = z + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ 2y = 7 \\ 2z = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{7}{2} \\ z = -4 \end{cases}$. Ainsi $G\left(1; \frac{7}{2}; -4\right)$

Exercice n°12

On calcule les coordonnées de \overrightarrow{AB} $\begin{cases} x_B - x_A = 2 \\ y_B - y_A = 3 \\ z_B - z_A = 4 \end{cases}$ et \overrightarrow{AC} $\begin{cases} x_C - x_A = 4 \\ y_C - y_A = 6 \\ z_C - z_A = 8 \end{cases}$. Puisque $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires, donc les points A, B et C sont alignés.

Exercice n°13

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Les coordonnées de \overrightarrow{AB} sont $\overrightarrow{AB} \begin{cases} x_B - x_A = -\frac{3}{2} \\ y_B - y_A = -1 \\ z_B - z_A = -\frac{9}{2} \end{cases}$. Si on note $D(x; y; z)$, les coordonnées de \overrightarrow{DC} sont

$$\overrightarrow{DC} \begin{cases} x_C - x = -x \\ y_C - y = -5 - y \\ z_C - z = 3 - z \end{cases} . \text{ L'égalité } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ entraîne donc } \begin{cases} -x = -\frac{3}{2} \\ -5 - y = -1 \\ 3 - z = -\frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -4 \\ z = \frac{15}{2} \end{cases} .$$

Les coordonnées de D sont donc $D\left(\frac{3}{2}; -4; \frac{15}{2}\right)$

Exercice n°14

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{cases} x_B - x_A = -2 \\ y_B - y_A = 1 \\ z_B - z_A = \frac{1}{2} \end{cases}$, $\overrightarrow{AC} \begin{cases} x_C - x_A = 1 \\ y_C - y_A = 0 \\ z_C - z_A = -\frac{1}{2} \end{cases}$ et $\overrightarrow{AD} \begin{cases} x_D - x_A = 0 \\ y_D - y_A = 1 \\ z_D - z_A = -\frac{1}{2} \end{cases}$

D'après leur coordonnées, on constate que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$, ce qui implique que le point D appartient au plan formé par les trois autres points A, B, C, donc que A, B, C et D sont coplanaires

Exercice n°15

1) Un vecteur normal au plan P est le vecteur $\vec{n}(1; 3; -1)$

2) a) Un point M de P est, par exemple $M(0; 0; 7)$

b) Le point L(1; -1; 2) appartient au plan P si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du plan P.

On calcule $x_L + 3y_L - z_L + 7 = 1 + 3 \times (-1) - 2 + 7 = 3 \neq 0$. Les coordonnées de L ne vérifiant pas l'équation du plan P, le point L n'appartient pas à P

c) Le point N(2; 5; z) appartient au plan P si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du plan P, donc si et seulement si $x_N + 3y_N - z_N + 7 = 0 \Leftrightarrow 2 + 3 \times 5 - z + 7 = 0 \Leftrightarrow z = 24$. Le point N est donc $N(2; 5; 24)$

Exercice n°16

1) Un vecteur normal au plan P est le vecteur $\vec{n}(2;1;1)$

2) Notons $A(x_A; y_A; z_A)$. Si A appartient à l'axe des abscisses (Ox), alors $y_A = z_A = 0$. Si de plus A appartient au plan P , ses coordonnées vérifient l'équation de P , à savoir $2x_A + y_A + z_A = 6 \Leftrightarrow 2x_A = 6 \Leftrightarrow x_A = 3$. Ainsi $A(3;0;0)$

b) Notons $B(x_B; y_B; z_B)$. Si B appartient à l'axe (Oy), alors $x_B = z_B = 0$. Si de plus B appartient au plan P , ses coordonnées vérifient l'équation de P , à savoir $2x_B + y_B + z_B = 6 \Leftrightarrow y_B = 6$. Le point B est donc $B(0;6;0)$

c) Notons $C(x_C; y_C; z_C)$. Si C appartient à l'axe (Oz), alors $x_C = y_C = 0$. Si de plus C appartient au plan P , ses coordonnées vérifient l'équation de P , à savoir $2x_C + y_C + z_C = 6 \Leftrightarrow z_C = 6$. Le point C est donc $C(0;0;6)$

3) figure ci après

Exercice n°17

1) On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{cases} x_B - x_A = 5 \\ y_B - y_A = -1 \\ z_B - z_A = -5 \end{cases}$, $\overrightarrow{AC} \begin{cases} x_C - x_A = 4 \\ y_C - y_A = -1 \\ z_C - z_A = -3 \end{cases}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{cases} x_D - x_C = 5 \\ y_D - y_C = -1 \\ z_D - z_C = -5 \end{cases}$

2) a) \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel k unique satisfaisant aux trois conditions $\begin{cases} 5k = 4 \\ -k = -1 \\ -5k = -3 \end{cases}$

b) A la lecture de leur coordonnées, on constate que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, donc que $(AB) \parallel (CD)$

3) a) On calcule : $2x_A + 5y_A + z_A = 2 \times (-3) + 5 \times 4 + 6 = -6 + 20 + 6 = 20$ puis

$2x_B + 5y_B + z_B = 2 \times 2 + 5 \times 3 + 1 = 4 + 15 + 1 = 20$, $2x_C + 5y_C + z_C = 2 \times 1 + 5 \times 3 + 3 = 2 + 15 + 3 = 20$

$2x_D + 5y_D + z_D = 2 \times 6 + 5 \times 2 + (-2) = 12 + 10 - 2 = 20$. Les coordonnées de A, B, C et D vérifient donc cette équation.

b) Si A, B et S sont alignés, alors les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AS} sont colinéaires. Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AS} = t \overrightarrow{AB}$

Notons $S(x; y; z)$. Alors $\overrightarrow{AS} \begin{cases} x_S - x_A = x + 3 \\ y_S - y_A = y - 4 \\ z_S - z_A = z - 6 \end{cases}$, et de l'égalité $\overrightarrow{AS} = t \overrightarrow{AB}$ on déduit $\begin{cases} x + 3 = 5t \\ y - 4 = -t \\ z - 6 = -5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5t - 3 \\ y = -t + 4 \\ z = -5t + 6 \end{cases}$

Mais puisque $x_S = 7$, on aura alors $5t - 3 = 7 \Leftrightarrow t = 2$. Le point S est donc $S(7; 2; -4)$

c) Si O, F et P sont alignés, alors les vecteurs \overrightarrow{OF} et \overrightarrow{OP} sont colinéaires.

Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OP} = t \overrightarrow{OF}$. Notons $P(x; y; z)$.

Alors $\overrightarrow{OP} \begin{cases} x_P - x_O = x \\ y_P - y_O = y \\ z_P - z_O = z \end{cases}$ et $\overrightarrow{OF} \begin{cases} x_F - x_O = 1 \\ y_F - y_O = 1 \\ z_F - z_O = 1 \end{cases}$. De l'égalité $\overrightarrow{OP} = t \overrightarrow{OF}$ on déduit $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

Mais puisque le point P vérifie l'équation de (E) on doit avoir $2t + 5t + t = 20 \Leftrightarrow t = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$. Ainsi $P\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$

Exercice n°18

Un vecteur normal au plan $P_1 : -x + y + 2z - 1 = 0$ est le vecteur $\vec{n}_1(-1;1;2)$

Un vecteur normal au plan $P_2 : 3x - y = 0$ est le vecteur $\vec{n}_2(3;-1;0)$

Un vecteur normal au plan $P_3 : 2y - 1 = 0$ est le vecteur $\vec{n}_3(0;2;0)$

Un vecteur normal au plan $P_4 : 2x - z + 3 = 0$ est le vecteur $\vec{n}_4(2;0;-1)$

Exercice n°19

1) Si $\vec{n}(3;2;1)$ est un vecteur normal au plan P_1 , celui-ci a une équation de la forme $P_1 : 3x + 2y + z + d = 0$

On utilise les coordonnées du point A(2;-3;5) pour déterminer d . $3x_A + 2y_A + z_A + d = 0 \Leftrightarrow d = -3x_A - 2y_A - z_A$, c'est-à-dire $d = -3 \times 2 - 2 \times (-3) - 5 = -5$. L'équation de P_1 est donc $P_1 : 3x + 2y + z - 5 = 0$

2) Si $\vec{n}(5;3;2)$ est un vecteur normal au plan P_2 , celui-ci a une équation de la forme $P_2 : 5x + 3y + 2z + d = 0$

On utilise les coordonnées du point A(4;-2;1) pour déterminer d . $5x_A + 3y_A + 2z_A + d = 0 \Leftrightarrow d = -5x_A - 3y_A - 2z_A$, c'est-à-dire $d = -5 \times 4 - 3 \times (-2) - 2 \times 1 = -16$. L'équation de P_2 est donc $P_2 : 5x + 3y + 2z - 16 = 0$

3) Si $\vec{n}(0;2;1)$ est un vecteur normal au plan P_3 , celui-ci a une équation de la forme $P_3 : 2y + z + d = 0$

On utilise les coordonnées du point A(1;1;0) pour déterminer d . $2y_A + z_A + d = 0 \Leftrightarrow d = -2y_A - z_A$, c'est-à-dire $d = -2 \times 1 - 0 = -2$. L'équation de P_3 est donc $P_3 : 2y + z - 2 = 0$

Exercice n°20

1) Un vecteur normal au plan P d'équation : $2x - 3y + 6z - 18 = 0$ est $\vec{n}(2;-3;6)$

2) Si le plan P' est parallèle au plan P , alors $\vec{n}(2;-3;6)$ est aussi un vecteur normal à P' qui aura donc une équation de la forme $2x - 3y + 6z + d = 0$. On détermine d grâce aux coordonnées du point B(6;-4;-4) :

$2x_B - 3y_B + 6z_B + d = 0 \Leftrightarrow d = -2x_B + 3y_B - 6z_B = 0$. L'équation de P' est donc $2x - 3y + 6z = 0$

Exercice n°21

Notons $A(x; y; z)$. Si \vec{AB} et \vec{n} sont colinéaires, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{AB} = t\vec{n}$

On calcule $\vec{AB} \begin{cases} x_B - x_A = 6 - x \\ y_B - y_A = -4 - y \\ z_B - z_A = -4 - z \end{cases}$ et $t\vec{n} \begin{cases} 2t \\ -3t \\ 6t \end{cases}$. De l'égalité $\vec{AB} = t\vec{n}$, on déduit $\begin{cases} 6 - x = 2t \\ -4 - y = -3t \\ -4 - z = 6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = 3t - 4 \\ z = -4 - 6t \end{cases}$

Mais si A est un point du plan P , ses coordonnées vérifient l'équation de P , à savoir $2x_A - 3y_A + 6z_A - 18 = 0$, donc

$$2(6 - 2t) - 3(3t - 4) + 6(-4 - 6t) - 18 = 0 \Leftrightarrow -49t = 18 \Leftrightarrow t = -\frac{18}{49}$$

$$\text{Le point A est donc } \begin{cases} x = 6 - 2 \times \left(-\frac{18}{49}\right) = \frac{330}{49} \\ y = 3 \times \left(-\frac{18}{49}\right) - 4 = -\frac{250}{49} \\ z = -4 - 6 \times \left(-\frac{18}{49}\right) = -\frac{88}{49} \end{cases}$$

La distance entre les plans parallèles P et P' est donnée par

$$\begin{aligned} AB &= \|\overline{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \\ &= \sqrt{\left(6 - \frac{330}{49}\right)^2 + \left(-4 + \frac{250}{49}\right)^2 + \left(-4 + \frac{88}{49}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1296}{2401} + \frac{2916}{2401} + \frac{11664}{2401}} = \sqrt{\frac{15876}{2401}} = \sqrt{\frac{324}{49}} = \frac{18}{7} \end{aligned}$$

Exercice n°22

1) Un vecteur normal du plan P d'équation $2x + y - z = 5$ est $\vec{n}_1(2; 1; -1)$. Un vecteur normal du plan P' d'équation $-x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 7$ est $\vec{n}_2\left(-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Les vecteurs $\vec{n}_1(2; 1; -1)$ et $\vec{n}_2\left(-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ n'étant pas colinéaires (il n'existe

pas de réel k unique satisfaisant à la fois $\begin{cases} 2k = -1 \\ 1 \times k = \frac{1}{2} \\ (-1) \times k = -\frac{1}{2} \end{cases}$), les deux plans P et P' ne sont pas parallèles

2) Un vecteur normal du plan P d'équation $x + 3y - 5z = 4$ est $\vec{n}_1(1; 3; -5)$. Un vecteur normal du plan P' d'équation $-3x - 9y + 15z = -6$ est $\vec{n}_2(-3; -9; 15)$. Puisque $\vec{n}_2 = -3\vec{n}_1$, les vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont colinéaires, donc les deux plans P et P' sont parallèles.

3) Un vecteur normal du plan P d'équation $x + 3y - 2z = 8$ est $\vec{n}_1(1; 3; -2)$. Un vecteur normal du plan P' d'équation $-4x - 12y + 8z = -32$ est $\vec{n}_2(-4; -12; 8)$. Puisque $\vec{n}_2 = -4\vec{n}_1$, les vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont colinéaires, donc les deux plans P et P' sont parallèles

Exercice n°23

1) On calcule les coordonnées des vecteurs $\overline{AB} \begin{cases} x_B - x_A = 1 \\ y_B - y_A = -1 \\ z_B - z_A = 1 \end{cases}$, $\overline{AC} \begin{cases} x_C - x_A = -2 \\ y_C - y_A = 1 \\ z_C - z_A = 0 \end{cases}$

Les vecteurs \overline{AB} et \overline{AC} ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel k unique satisfaisant aux trois conditions

$$\begin{cases} k = -2 \\ -k = 1 \\ k = 0 \end{cases} . \text{ Les points A, B et C ne sont donc pas alignés, donc définissent un plan (ABC).}$$

b) Notons $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur normal à (ABC)

$$\text{Puisque } \overline{AB} \cdot \vec{n} = 0, \text{ on a } 1 \times a + (-1) \times b + 1 \times c = 0 \Leftrightarrow a - b + c = 0$$

$$\text{Puisque } \overline{AC} \cdot \vec{n} = 0, \text{ on a } (-2) \times a + 1 \times b + 0 \times c = 0 \Leftrightarrow -2a + b = 0$$

Le système $\begin{cases} a - b + c = 0 \\ -2a + b = 0 \end{cases}$ de deux équations à trois inconnues admettant une infinité de solutions, on doit « fixer

arbitrairement » une valeur pour l'une quelconque des inconnues. L'énoncé nous conseille de choisir $a=1$

$$\text{Le système devient alors } \begin{cases} a=1 \\ 1-b+c=0 \\ -2+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=b-1=1 \\ b=2 \end{cases}. \text{ Un vecteur normal à (ABC) est donc } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Une équation du plan (ABC) est alors $x+2y+z+d=0$. On détermine d en utilisant les coordonnées de l'un des points de ce plan, par exemple $A(2;1;1)$. On obtient $x_A+2y_A+z_A+d=0 \Leftrightarrow d=-x_A-2y_A-z_A=-2-2-1=-5$

Une équation du plan (ABC) est alors $\boxed{x+2y+z-5=0}$.

2) Une équation de (ABC) étant de la forme $ax+by+cz=d$, les coordonnées de A,B et C vérifiant cette équation de plan, nous permettent de dresser le système de trois équations à 4 inconnues :

$$\begin{cases} ax_A+by_A+cz_A+d=0 \\ ax_B+by_B+cz_B+d=0 \\ ax_C+by_C+cz_C+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+c+d=0 \\ 3a+2c+d=0 \\ 2b+c+d=0 \end{cases}$$

Ce système admettant une infinité de solutions, on doit « fixer arbitrairement » une valeur pour l'une quelconque des inconnues. On fixe par exemple $a=1$ Le système devient :

$$\begin{cases} b+c+d=-2 & L_1 \\ 2c+d=-3 & L_2 \\ 2b+c+d=0 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c+d=-2 & L_1 \\ 2c+d=-3 & L_2 \\ -c-d=4 & L_4=L_3-2L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c+d=-2 & L_1 \\ 2c+d=-3 & L_2 \\ c=1 & L_4+L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2-c-d=2 & L_1 \\ d=-3-2c=-5 & L_2 \\ c=1 & L_4+L_2 \end{cases}$$

On retrouve alors l'équation $\boxed{x+2y+z-5=0}$

Exercice n°24

1) P et P' admettent pour vecteurs normaux les vecteurs $\vec{n}_1(\cos t; \sin t; -1)$ et $\vec{n}_2(\cos t; \sin t; +1)$.

Le produit scalaire $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (\cos t)(\cos t) + (\sin t)(\sin t) + (-1)(1) = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$ nous permet d'affirmer que les plans P et P' sont perpendiculaires.

2) l'axe Ox est parallèle à P pour toutes les valeurs de t pour lesquelles $\vec{n}_1(\cos t; \sin t; -1)$, vecteur normal à P sera orthogonal à tout vecteur directeur de l'axe Ox.

Un vecteur directeur de l'axe Ox est $\vec{u}(1;0;0)$. Le produit scalaire $\vec{n}_1 \cdot \vec{u} = (\cos t) \times 1 + (\sin t) \times 0 + (-1)(0) = \cos t$. Pour $t = \frac{\pi}{2}[\pi]$, $\vec{n}_1 \cdot \vec{u} = \cos t = 0$, donc l'axe Ox est parallèle à P.

3) Les coordonnées des points de la droite intersection des deux plans vérifient le système $\begin{cases} (\cos t)x + (\sin t)y - z = 0 \\ (\cos t)x + (\sin t)y + z = 0 \end{cases}$,

$$\text{soit, par soustraction des deux lignes, } \begin{cases} (\cos t)x + (\sin t)y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos t)x + (\sin t)y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Si $t = \frac{\pi}{2}[\pi]$, puisque $\cos t = 0$ et $\sin t = 1$, le système est équivalent à $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$. Un vecteur directeur de la droite

intersection des deux plans est $\vec{v}(1;0;0)$

Si $t \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, $\begin{cases} (\cos t)x + (\sin t)y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\lambda \tan t \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ Un vecteur directeur de la droite intersection des deux plans

est $\vec{v}(-\tan(t);1;0)$

4) La distance de $A(\cos t, \sin t, -3)$ au plan P vaut $\frac{|(\cos t)(\cos t) + (\sin t)(\sin t) + 3|}{\sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2 + (-1)^2}} = \frac{|1+3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$